

Knobelaufgabe des Monats Mai Lösungen

Aufgabe 1

Lösung: 49

a)

Informationen aus der ersten Zeile:

Da die Summe von 4 blauen Sechsecken 92 ist, muss jedes einzelne blaue Sechseck den Wert $92:4 = 23$ haben.

Informationen aus der dritten Zeile:

Wenn man den Wert von 2 blauen Sechsecken subtrahiert, so findet man heraus, dass 2 rote Sechsecke den Wert $74 - 2 \cdot 23 = 28$ haben. Demnach hat ein rote Rechteck den Wert $28:2 = 14$.

Informationen aus der vierten Spalte: Wenn zwei blaue Sechsecke, ein rotes Sechseck und ein weißes Sechseck den Wert 72 haben, dann hat ein weißes Sechseck den Wert $72 - 2 \cdot 23 - 14 = 12$.

Informationen aus der zweiten Zeile:

Wenn zwei rote Sechsecke, ein weißes Sechseck und ein dunkelblaues Sechseck die Summe 51 haben, dann hat ein dunkelblaues Sechseck den Wert $51 - 2 \cdot 14 - 12 = 11$.

Was ist dann die Lösung für das Fragezeichen?

$$2 \cdot 11 + 14 + 23 = 59$$

b)

Lösung: 53 (für beide Fragezeichen)

Die Summe aller Zeilensummen ist $81 + 66 + 52 + 60 = 259$. Dies ist die Summe aller 16 Felder. Die Summe aller Spaltensummen muss ebenfalls 259 sein. Die erste und letzte Spalte müssen zusammen den Wert $259 - 65 - 88 = 106$ haben. Da sowohl die erste als auch die letzte Spalte aus 2 weißen, einem grünen und einem Sechseck bestehen, muss die Summe dieser Spalten gleich sein. Eine einzelne Spalte hat also den Wert $106:2 = 53$.

Aufgabe 2:

a)

Geschwindigkeit des Wolfes: $4 \cdot v$

Geschwindigkeit des Elches: v

Der Elch kann ans Ufer gelangen, ohne dass ihn der Wolf dort bereits erwartet.

Damit er dies schafft muss er folgende Taktik anwenden:

Der schlaue Wolf versucht immer so schnell wie möglich an die Position auf der Kreisbahn zu gelangen, die am kürzesten vom Elch entfernt ist, damit er ihn so schnell wie möglich erreichen kann.

Der Elch versucht hingegen sich so gegenüber dem Wolf zu befinden, dass er möglichst weit von ihm entfernt ist, sodass der Wolf die maximale Strecke, die der Länge des halben Umfangs entspricht, zurücklegen muss, um den Elch zu erreichen. Dies ist der Fall, wenn sich der Elch und der Wolf auf einer Linie befinden und der Elch dann anschließend in die entgegengesetzte Richtung des Wolfes gerade ans Ufer schwimmt (Abb. 1).

Versucht der Elch vom Mittelpunkt aus direkt ans Ufer zu schwimmen, so erwartet ihn der Wolf am Ufer bereits, da der halbe Umfang des Kreises weniger als viermal so groß ist wie der Radius des Kreises, also die Strecke, die der Elch zurücklegen würde ($\pi \cdot r/4 < r \rightarrow \pi/4 < 1$).

Die Strecke, die der Elch zurücklegen muss, nachdem er sich in einem möglichst großen Abstand gegenüber des Wolfes befindet, sollte also so klein wie möglich sein.

Diese Strecke kann der Elch auch verkürzen, da die Winkelgeschwindigkeit des Elches, wenn er sich nahe des Mittelpunktes um den Mittelpunkt dreht, viel größer ist, als die des Wolfes, da der Elch eine viel kleinere Strecke zurücklegen muss.

Die Frage ist nun also wie weit der Elch vom Mittelpunkt des Sees wegschwimmen kann, wenn er im Kreis um den Mittelpunkt schwimmt, sodass die Winkelgeschwindigkeit des Elches gleich der Winkelgeschwindigkeit des Wolfes ist, wodurch Elch und Wolf immer in einer Linie um den Mittelpunkt kreisen würden (Abb. 2).

Anders gefragt heißt die Frage: Wie groß darf der Radius der Elch-Kreisbahn sein, damit die Winkelgeschwindigkeit gleich der des Wolfes ist.

Winkelgeschwindigkeit w : $w = v/r$ (Geschwindigkeit/Radius)

Das heißt es muss gelten:

$$4 \cdot v/r = v/x \quad (x \text{ ist gesucht})$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{4} \cdot r$$

Der Elch kann also maximal $\frac{1}{4} \cdot r$ vom Mittelpunkt des Kreises wegschwimmen.

Der Elch muss nun nur noch eine Strecke von $(r - \frac{1}{4}r) = \frac{3}{4}r$ zurücklegen, um an den Uferrand zu gelangen.

Da der halbe Umfang des Kreises nun mehr als viermal so groß ist wie die zurückzulegende Strecke vom Elch, gilt also:

$$\pi \cdot r / 4 > \frac{3}{4}r \rightarrow \pi / 4 > \frac{3}{4}$$

Der Elch erreicht vor dem Wolf das Ufer des Sees.

b)

Geschwindigkeit des Wolfes: $x \cdot v$

Geschwindigkeit des Elches: v

Abstand des Elches vom Mittelpunkt des Kreises: y

Faktor, wie viel mal der Wolf schneller ist: x

Beide Winkelgeschwindigkeiten sind gleich, wenn gilt:

$$x \cdot v / r = v / y$$

$$\rightarrow y = r / x$$

$(r - y) = (r - r/x) = (x - 1) \cdot r/x$ ist somit der Abstand des Elches vom Kreisrand.

Liegt die Geschwindigkeit des Wolfes in der Lösungsmenge der Gleichung, kann der Elch dem Wolf entweichen.

$$\pi \cdot r / x > (x-1) \cdot r / x \quad | \cdot x$$

$$\pi \cdot r > (x-1) \cdot r \quad | / r$$

$$\pi > x-1 \quad | +1$$

$$\pi + 1 > x$$

x ist also der Faktor, der angibt wie viel mal schneller der Wolf als der Elch ist. Ist der Faktor kleiner als $(\pi+1)$, so kann der Elch dem Wolf immer entkommen.

